Neke primjene određenog integrala u inženjerstvu

Matematika 2

Erna Begović Kovač, 2019.

Literatura: I. Gusić, Lekcije iz Matematike 2

http://matematika.fkit.hr

Uvod

Određeni integral možemo koristiti za rješavanje sljedećih problema:

- problem težišta nehomogene žice,
- problem momenta inercije,
- određivanje rada kojeg vrši sila koja djeluje duž pravca.

Masa nehomogenog segmenta

Promatramo masu nehomogenog segmenta $[a, b]$ u ovisnosti o gustoći segmenta koja je dana funkcijom $f(x)$.

Promjena mase $\triangle m$ iznosi približno $f(x)\triangle x$, tj.

$$\triangle m \approx f(x)\triangle x.$$

Iz toga dobijemo

$$dm = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad m' = f(x),$$

pa je

$$m = \int_a^b f(x)dx.$$

Primjer 1

Funkcija gustoće segmenta $[0, 5]$ je $f(x) = x$.

(i) Grafički predočite i interpretirajte raspored mase.

(ii) Odredite ukupnu masu segmenta $[0, 5]$.

(iii) Odredite točku $c \in [0, 5]$ do koje je raspoređena polovica mase.

Težište sustava masa

U diskretnom slučaju (kada masa postoji samo u nekim točkama, a između je jednaka nula), ako su mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$ smještene na pravcu u točke s koordinatama $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onda je težište ovakvog sustava masa dano sa

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Težište segmenta

U kontinuiranom slučaju (kada je masa "razmazana" po čitavom segmentu) u formuli za težište prelazimo sa sume na integral. Masu u pojedinoj točki zamijenimo sa $f(x)$ i dobijemo

$$x_T = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

Napomena: Težište homogenog segmenta (homogene žice) je njegova sredina. To ne vrijedi ako segment nije homogen.

Primjer 2

Odredite težište segmenta iz prethodnog primjera; $[a, b] = [0, 5]$, $f(x) = x$.

Masa i težište beskonačnog intervala

U slučaju beskonačnog intervala, također vrijede prethodne formule za masu i težište,

$$m = \int_a^b f(x)dx, \qquad x_T = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

Primjer 3

Neka je masa razmazana na intervalu $[0, \infty\rangle$ prema pravilu za funkciju gustoće $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, za $x \geq 0$, pri čemu je $\lambda > 0$ realna konstanta. Odredite:

(i) masu intervala,

(ii) težište,

(iii) točku $c \in [0, \infty\rangle$ do koje je raspoređena polovica mase.

Moment inercije

Moment inercije (mjera tromosti pri rotaciji) I mase m oko točke udaljene r iznosi

$$I = mr^2.$$

U slučaju sustava masa, momenti inercije oko težišta sustava masa dan je formulom

$$I_T = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_T)^2 m_i.$$

Ova formula dobije se zbrajanjem formula za svaku pojedinu masu.

Prema tome, moment inercije oko težišta segmenta $[a, b]$ s funkcijom gustoće f dan je formulom

$$I_T = \int_a^b (x - x_T)^2 f(x) dx.$$

Primjer 4

Odredite moment inercije homogenog segmenta.

Homogenost: $f(x) = 1$, za svaki $x \in [a, b]$.

Težište: $x_T = \frac{a+b}{2}$.

Stoga je

$$I_T = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \cdot 1 dx = \cdots = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Ako označimo duljinu segmenta sa $L = b - a$ i uočimo da je masa segmenta $m = L$ (jednakost brojeva bez mjernih jedinica), dobijemo poznatu formulu za moment inercije homogenog štapa

$$I_T = m\frac{L^2}{12}.$$

Primjer 5

Odredite moment inercije oko težišta segmenta iz Primjera 1; $[a, b] = [0, 5]$, $f(x) = x$.

Rad sile

Rad opisuje djelovanje sile na nekom putu. U slučaju konstantne sile jednak je umnošku sile i duljine puta, $W = Fs$. U slučaju da je sila promjenljiviva, problem određivanja rada rješava se pomoću integrala.

Neka je $F(x)$ sila koja djeluje u točki x. Ako je $F(x) > 0$, sila djeluje u pozitivnom smjeru, a ako je $F(x) < 0$, sila djeluje u negativnom smjeru.

Za dio rada $\triangle W$ koji sila napravi na putu od x do $x + \triangle x$ vrijedi

$$\triangle W \approx F(x) \triangle x.$$

Dobijemo

$$dW = F(x)dx \quad \Rightarrow \quad W' = F(x),$$

pa je

$$W = \int_a^b F(x)dx.$$

Elastična opruga

Neka je u točki s koordinatom A pričvrštćena savršeno elastična tanka opruga, kojoj je u trenutku mirovanja vrh u ishodištu.

Oprugu stlačimo u točku A i pustimo. Zbog savršene elastičnosti, vrh opruge titrat će između točaka $-A$ i A.

Pretpostavimo da je sustav izoliran, tj. da je jedina sila koja se javlja sila napetosti opruge. Vrijednost te sile u točki x označimo $F(x)$. Intuitivno je jasno da je sila napetosti uvijek usmjerena prema ishodištu pa su x i $F(x)$ suprotnog predznaka. Također, intuitivno je jasno, a potvdi se pokusom, da je sila napetosti proporcionalna udaljenost vrha opruge od ishodišta.

Elastična opruga

Iz prethodnog dobijemo jednadžbu za silu napetosti

$$F(x) = -kx,$$

gdje je k konstanta koja ovisi o materijalu opruge.

Primjer 6

Izračunajte i komentirajte rad sile napetosti elastične opruge na putu od a do b.

Zadatci

1. Izračunajte moment inercije oko težišta intervala $[0, \infty\rangle$ uz funkciju gustoće sile $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

2. Neka je $f(x) = 10 - x$ funkcija gustoće segmenta $[0, 10]$.
   (i) Grafički procijenite i izračunajte masu zadanog segmenta.
   (ii) Odredite točku c do koje je raspoređeno pola mase.
   (iii) Odredite težište segmenta x_T.
   (iv) Izračunajte moment inercije oko težišta.